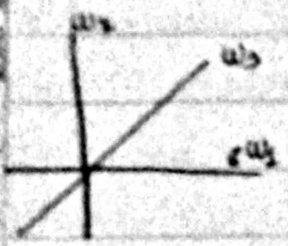
3/03/2013

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 72 α)

Εστω $V=\mathbb{R}^2$ $W_1=<(1,0)>$, $W_2=<(0,1)>$ $W_3=<(1,1)>$



Έχουμε $W_i \cap W_j=\{0_V\}$ για $i\neq j$

Αλλά το άθροισμα $W_1+W_2+W_3$ δεν είναι ευθύ γιατί $W_1+W_2+W_3=\mathbb{R}^2$ άρα $\dim(W_1+W_2+W_3)=2\neq 3=\dim W_1+\dim W_2+\dim W_3$

Εστω $V=\mathbb{R}^3$ $W_1=<(1,0,0)>$, $W_2=<(1,1,0)>$, $W_3=<(1,1,1)>$. Αφού

$$\det\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=1\neq 0_F$$

τα $(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$. Σαν συνέπεια $W_1+W_2+W_3=\mathbb{R}^3$. Άρα $\dim(W_1+W_2+W_3)=\dim W_1+\dim W_2+\dim W_3$, και επομένως το άθροισμα είναι ευθύ

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ

Εστω $A\in F^{n\times n}$. Το $w\in F^{n\times 1}$ λέγεται ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A, αν υπάρχει ιδιοτιμή $(\lambda\in F)$ ώστε $Aw=\lambda w$ και $w\neq 0_{n\times 1}$

π.χ. το $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $\begin{bmatrix}2&3\\0&5\end{bmatrix}$ γιατί $A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 73

Α) Εστω $A\in F^{n\times n}$ και $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ διακεκριμένες ιδιοτιμές του A. Τότε το άθροισμα $V_A(\lambda_1)+V_A(\lambda_2)+\dots+V_A(\lambda_k)$ είναι ευθύ

Β) Εστω $V\neq\{0_V\}$ πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος επί του F. $T: V\to V$ γραμμική απεικόνιση και $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ διακεκριμένες ιδιοτιμές της T. Τότε το άθροισμα $V_T(\lambda_1)+\dots+V_T(\lambda_k)$ είναι ευθύ

Απόδειξη α) Για $k=2$ και πίνακα A. Εστω $\lambda_1\neq\lambda_2$ ιδιοτιμές του A. Θα δείξουμε $V_A(\lambda_1)\cap V_A(\lambda_2)=\{0_V\}$. Εστω ότι δεν ισχύει και $0\neq w\in V_A(\lambda_1)\cap V_A(\lambda_2)$

Άρα $\begin{cases}Aw=\lambda_1 w\\ Aw=\lambda_2 w\end{cases}\Rightarrow 0_{n\times 1}=(\lambda_1-\lambda_2)w \overset{\lambda_1\neq\lambda_2}{\Rightarrow} w=0_{n\times 1}$ (αντίφαση) (β) Η γενική περίπτωση (δηλ. $\kappa \geq 3$ αόριστα) Η περίπτωση για γραμμική $T: V \to V$ αντίστοιχη.

ΠΡΟΤΑΣΗ 74 (χωρίς απόδειξη)
Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ και λ ιδιοτιμή του A. Από τα προηγούμενα υπάρχει $m(\lambda) > 0$ ακέραιος ώστε $\chi_A(x) = (-1)^\nu (x-\lambda)^{m(\lambda)} \cdot p_1(x) \cdot \ldots \cdot p_\kappa(x)$ όπου $p_i(x) \in \mathbb{F}[x]$ μονικά ανάγωγα, διαφορετικά του $x-\lambda$. Ισχύει ότι $\dim V_A(\lambda) \leq m(\lambda)$
Η ίδια πρόταση ισχύει με αντικατάσταση A με $T: V \to V$

ΠΡΟΤΑΣΗ 75 α) (χωρίς απόδειξη)
Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\kappa$ όλες οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A, τα ακόλουθα θα είναι ισοδύναμα. Θέτουμε $V = \mathbb{F}^{\nu \times 1}$
(i) Ο A είναι διαγωνίσιμος
(ii) Δεν υπάρχει ανάγωγο πολυώνυμο βαθμού ≥ 2 που να διαιρεί το $\chi_A(x)$ και αν γράψουμε $\chi_A(x) = (-1)^\nu (x-\lambda_1)^{m(\lambda_1)} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_\kappa)^{m\lambda_\kappa}$ τότε $\dim V_A(\lambda_i) = m(\lambda_i)$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$
(iii) $V = V_A(\lambda_1) + \ldots + V_A(\lambda_\kappa)$
(iv) $V = V_A(\lambda_1) + \ldots + V_A(\lambda_\kappa)$ και το άθροισμα είναι ευθύ
(v) Υπάρχει βάση V που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A
(αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει και για γραμμική $T: V \to V$)

ΠΟΡΙΣΜΑ 75 β)
Αν $\chi_A(x)$ είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων επί $(-1)^\nu$ δηλ. $\chi_A(x) = (-1)^\nu (x-\lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_\nu)$ με $\lambda_i \neq \lambda_j$ για $i \neq j$ τότε ο A είναι διαγωνίσιμος

Απόδειξη: Άμεση από το (ii) $\Rightarrow$ (i) της πρότασης 75, αφού $\dim V_A(\lambda_i) = 1$ για κάθε i

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 76 (Δουλεύει και για γραμμικές $T: V\to V$)

Έστω $A\in\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Ο αλγόριθμος διαγωνιοποιεί τον A ή δείχνει ότι δεν είναι διαγωνίσιμος 201

ΒΗΜΑ 1: Υπολογίζουμε $\chi_A(x)\in\mathbb{F}[x]$

ΒΗΜΑ 2: Υπολογίζουμε τις ρίζες $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ του $\chi_A(x)$, δηλ. τις διακεκριμένες ιδιοτιμές του A. Γράφουμε $\chi_A(x) = (-1)^{\nu}(x-\lambda_1)^{m(\lambda_1)}\cdots(x-\lambda_k)^{m(\lambda_k)}\,h(x)$, όπου $h(x)=1_F$ ή $h(x)$ = γινόμενο μονικών αναγώγων βαθμών ≥ 2

ΒΗΜΑ 3: Αν $h(x)\neq 1_F$, τότε ο A δεν είναι διαγωνίσιμος (επί του $\mathbb{F}$) και ΣΤΑΜΑΤΑΜΕ

ΒΗΜΑ 4: (Έστω ότι βρήκαμε $h(x)=1_F$) Υπολογίζουμε για $i=1,2,\dots,k$ τους ιδιοχώρους $V_A(\lambda_i)=\{w\in\mathbb{F}^{\nu\times1} : (A-\lambda_i I_\nu)w=\mathbb{O}_{\nu\times1}\}$

Αν για κάποιο i με $1\leq i\leq k$ ισχύει $\dim V_A(\lambda_i) < m(\lambda_i)$, τότε ο A δεν είναι διαγωνίσιμος και ΣΤΑΜΑΤΑΜΕ. Υποθέτουμε $\dim V_A(\lambda_i)=m(\lambda_i)$ για κάθε $1\leq i\leq k$. Τότε ο A είναι διαγωνίσιμος

ΒΗΜΑ 5 (Εύρεση P και διαγωνίου D με $D=P^{-1}AP$) Θέτουμε $D=\mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1,\dots,\lambda_1}_{m(\lambda_1)\text{ φορές}},\underbrace{\lambda_2,\dots,\lambda_2}_{m(\lambda_2)\ -''-},\dots,\underbrace{\lambda_k,\dots,\lambda_k}_{m(\lambda_k)\ -''-})$. Έστω $e_1,\dots,e_{m(\lambda_1)}$ βάση του υποχώρου $V_A(\lambda_1)$ του $\mathbb{F}^{\nu\times1}$ $D=\mathrm{diag}(2,2,2,3,4)=\begin{bmatrix}1 & & & 0\\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ 0 & & & 4\end{bmatrix}$

Έστω $e_{m(\lambda_1)+1},\dots,e_{m(\lambda_1)+m(\lambda_2)}$ βάση του $V_A(\lambda_2)$

⋮

$e_{m(\lambda_1)+\dots+m(\lambda_{k-1})+1},\dots,e_{m(\lambda_1)+\dots+m(\lambda_{k-1})+m(\lambda_k)}$ βάση του $V_A(\lambda_k)$

Θέτουμε $P=[e_1|e_2|e_3|\dots|e_{m(\lambda_1)+\dots+m(\lambda_k)}]\in\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Τότε P αντιστρέψιμος και $P^{-1}AP=D$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν $A\in\mathbb{R}^{4\times4}$ με $\chi_A(x)=(x-1)^2(x-3)(x-4)$ το $V_A(1)$ έχει βάση $\begin{bmatrix}3\\2\\4\\5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$, το $V_A(3)$ έχει βάση $\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}$ και το $V_A(4)$ έχει βάση $\begin{bmatrix}0\\5\\6\\7\end{bmatrix}$, τότε

$$P=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 5\\ 4 & 0 & 1 & 6\\ 5 & 1 & 0 & 7\end{bmatrix} \text{ και } D=\begin{bmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & 3 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Εφαρμογές Διαγωνισιμότητας

ΠΡΟΤΑΣΗ 77

Έστω $A, P \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με P αντιστρέψιμος και $k \geq 1$ ακέραιος. Τότε $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$

Απόδειξη: Με επαγωγή στο k. Αν $k=1$ προφανές. Υποθέτουμε ότι $k \geq 2$ και $(P^{-1}AP)^{k-1} = P^{-1}A^{k-1}P$. Τότε $(P^{-1}AP)^k = (P^{-1}AP)^{k-1}(P^{-1}AP) = (P^{-1}A^{k-1}PP^{-1}AP) = P^{-1}A^kP$

ΠΡΟΤΑΣΗ 78

Έστω $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_\nu \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Τότε για κάθε $k \geq 1$ $D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ 0 & & \lambda_\nu^k \end{bmatrix}$

Απόδειξη: Εύκολη με επαγωγή

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ 79

Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ διαγωνίσιμος. Εύρεση A^k για $k \geq 1$.

ΒΗΜΑ 1: Χρησιμοποιώντας αλγόριθμο 76 βρίσκουμε $P \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ αντιστρέψιμο και D διαγώνιο $D = P^{-1}AP$

ΒΗΜΑ 2: Από πρόταση 77, για $k \geq 1$ $D^k = P^{-1}A^kP \Rightarrow A^k = PD^kP^{-1}$ και υπολογίζουμε εύκολα D^k από πρόταση 78.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 80

Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2}$. Υπολογίστε το A^k για κάθε $k \geq 1$ με χρήση του αλγορίθμου 79.

ΑΠΟΔ. ΒΗΜΑ 1: $\chi_A(x) = \det \begin{bmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 4-x \end{bmatrix} = (x+1)(x-5)$ ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 5$. Επίσης A διαγωνίσιμος αφού $\chi_A(x)$ αναλύεται σε γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων

ΒΗΜΑ 2: Υπολογίζουμε $V_A(-1) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times1} : (A+I_2)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times1} : \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ [illegible] άρα $V_A(-1)$ Επ[illegible]

$V_A(5)$ έχει βάση μετά τις πράξεις $e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Θέτουμε

$P = [e_1 | e_2] = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ και $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$. Τότε (από

θεωρία) $D = P^{-1} A P$ και άρα $D^k = P^{-1} A^k P \Rightarrow A^k = P D^k P^{-1}$. Υπολογίζω

με $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Άρα $A^k = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 5^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Μετά τις πράξεις: $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2(-1)^k + 5^k & -2(-1)^k + 2 \cdot 5^k \\ -(-1) + 5^k & (-1)^k + 2 \cdot 5^k \end{bmatrix}$